USO INTEGRADO DE RECURSOS NÃO-DIGITAIS E TECNOLOGIAS DIGITAIS NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS ALGÉBRICOS – RELATO DE EXPERIÊNCIA.

Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Emanuelle Regina Lopes[1]

Marcus Basso[2]

Resumo:

Este trabalho aborda a importância da introdução ao pensamento algébrico, antes da formalização dos estudos de álgebra. Através de uma proposta de atividade aplicada em uma turma de 7º ano do ensino público, mostra uma alternativa para tratar do assunto sem a obrigatoriedade de utilizar a linguagem algébrica formal. A pesquisa tem como principal objetivo a compreensão da aprendizagem dos conceitos algébricos. As atividades foram propostas durante duas semanas, em quatro encontros de duas horas-aula com a utilização do aplicativo GeoGebra. Com base em princípios construcionistas, defende-se a importância do uso da tecnologia na realização desta atividade. A análise dos dados produzidos através da sequência de atividades é embasada no trabalho de Sessa e Canavarro. Os resultados da pesquisa nos mostram que o pensamento algébrico está presente nas maneiras de pensar dos estudantes, e que os recursos utilizados por eles abordam a generalização da aritmética, através de sucessivas somas.

Palavras-chave: Álgebra; educação matemática; ensino fundamental; GeoGebra.

1. Introdução

Neste relato trazemos um recorte de uma dissertação de mestrado em desenvolvimento, a qual encontra-se na fase de análise dos dados que foram produzidos num contexto pré-pandemia. Conhecer as necessidades pedagógicas dos alunos de diferentes anos de ensino nos fez perceber a dificuldade deles em conceitos básicos de álgebra. Não apenas as dificuldades

[1] UFRGS: emanuellerlopes@gmail.com.

[2] UFRGS: mbasso@ufrgs.br.

que aparecem no momento de resolver uma equação do 1º grau quando chegam no 7º ano, mas dificuldades em abordagens algébricas mais simples, como a compreensão de regras num novo jogo, por exemplo. Entendemos que nossa proposta de prática pedagógica tem uma abordagem propícia para momentos de aulas remotas online, ideais para o contexto pandêmico e pós-pandêmico, pois a utilização da ferramenta GeoGebraBook permite o acesso dos alunos ao material didático produzido, além de facilitar o compartilhamento de tela pelo professor.

2. Referencial Teórico

A carência de abordagens introdutórias à álgebra reflete na falta de compreensão de conceitos básicos. O simples fato de aparecer uma letra em meio a operações com números causa nos alunos um bloqueio no desenvolvimento do raciocínio. Papert (2008) esclarece que “ao excluir uma base muito maior do conhecimento que deveria servir como alicerce para a matemática formal, interrompemos a via para uma melhor aprendizagem” (PAPERT, 2008, p.30). Ainda de acordo com as ideias de Papert (2008), a introdução à álgebra e ao pensamento algébrico são a base concreta para que ocorra a abstração necessária para a compreensão dos conceitos formais. Assim, escolhemos como fundamentação teórica da pesquisa essa concepção construcionista.

Sessa (2005), aborda a construção do sentido do trabalho matemático, preocupada com a aprendizagem dos estudantes visando o interesse dos mesmos no desenvolvimento do raciocínio algébrico. Sendo o objetivo principal da proposta didática a “construção de sentido como resposta às dificuldades” (SESSA, 2005, p. 11-13). Suas ideias vão de encontro com o que acreditamos na concepção deste trabalho e buscamos propor na sequência de atividades a qual elaboramos. A autora também esclarece que a diferença entre um problema ser aritmético, algébrico ou geométrico está nas habilidades matemáticas de quem o resolve. Quando os estudantes iniciam os estudos formais da álgebra, suas habilidades precisam ser desenvolvidas.

> O que estamos postulando é que a chegada às equações desde a ideia de variável, fórmula ou número geral colocaria os alunos em melhores condições para captar o significado daquele objeto em toda a sua riqueza. Como será visto nos desenvolvimentos que se seguem, o trabalho em torno da generalização que propomos permitiria aos alunos construir referências para executar e controlar transformações algébricas que respeitassem a equivalência de expressões. Desta forma, eles seriam capazes de abordar o objeto "equação" com maior domínio técnico. (SESSA, 2005, p.28) (tradução da autora).

No estudo que vamos realizar sobre a generalização como forma de inserir a álgebra, identificamos duas zonas de trabalho que envolvem o algébrico a partir de aspectos um pouco diferentes: a produção de fórmulas para contar coleções e a formulação e validação de conjecturas sobre números e operações.

Organizaremos nosso estudo com base na análise de um conjunto de problemas relacionados a cada uma das duas "zonas" que acabamos de identificar. Os exemplos escolhidos nos permitirão desenvolver algumas características do trabalho algébrico que transcendem a especificidade da generalização" (SESSA, 2005, p. 72 e 73).

Para a análise dos resultados obtidos na nossa pesquisa, temos como alicerce Sessa, que analisa didaticamente os problemas propostos para os alunos e também Canavarro, que analisa e identifica habilidades algébricas nas resoluções dos estudantes.

Indo ao encontro com as ideias de Sessa (2005), Canavarro (2007) busca compreender o pensamento algébrico e sistematiza o pensamento algébrico investigando a aprendizagem da álgebra seguindo duas das principais vertentes a aritmética generalizada e o pensamento funcional.

Canavarro (2007) defende "a importância de se considerarem representações múltiplas e se estabelecerem relações entre elas, quer representações matemáticas não convencionais (como, por exemplo, os diagramas), quer representações convencionais (como, por exemplo, as tabelas, os gráficos, os símbolos)" (CANAVARRO, 2007, p. 81 e 82). Nós propusemos, na maioria das questões, generalizações em cima de figuras geométricas, em algumas a sequência foi construída no GeoGebra.

Nas atividades analisadas, Canavarro (2007) elenca habilidades do pensamento algébrico observadas nas produções dos alunos. Utilizaremos como suporte para nossa análise dos dados. São elas: identificar a estrutura matemática da situação em análise; estabelecer relações numéricas entre as duas variáveis em causa; generalizar uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência, em linguagem natural, justificando-a; expressar a generalização de duas formas distintas, por recorrência e através do termo geral.

3. Metodologia de Pesquisa

A pesquisa desenvolvida se caracteriza como uma pesquisa qualitativa na área da Educação Matemática e Tecnologias Digitais no Ensino e de Matemática e Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O local da pesquisa é a escola na qual a pesquisadora vivencia no seu cotidiano a prática docente e possui familiaridade com a comunidade escolar, a turma foi escolhida por ter como características a participação efetiva das aulas, com poucas ausências diariamente, e empenho na realização das tarefas.

A coleta dos dados foi feita via anotações da pesquisadora, fotos, assim como áudio e vídeo de câmera instalada na sala. A produção dos dados ocorreu da seguinte maneira: as atividades foram propostas para uma turma de 7º ano de 27 alunos, como a escola possui oito tablets, os estudantes foram divididos em oito grupos de trabalho, de acordo com a afinidade de cada um, sem limite de integrantes. Assim, os grupos ficaram divididos entre dois e quatro estudantes. A prática foi realizada em quatro encontros de duas horas-aula cada um, os estudantes deveriam fazer o registro por escrito das suas resoluções das questões propostas. As questões foram entregues impressas, e algumas construções geométricas estavam disponíveis no GeoGebraBook, para manipulação e interpretação das questões. O GeoGebraBook foi elaborado pela professora-pesquisadora e o link disponibilizado aos alunos apenas para manipulação, os estudantes não podiam alterar as construções, apenas analisá-las. Durante a realização das atividades, foi observada a dedicação dos alunos na leitura e interpretação das questões e o cuidado na escrita para a resposta estar o mais claro possível, sem rasuras. A professora-pesquisadora se deslocava pela sala de aula, atendendo chamados e dúvidas e incentivando os estudantes a escreverem suas maneiras de pensar sobre as questões.

4. Descrição e Análise de Dados

Escolhemos para esse trabalho o relato e a análise de duas questões propostas, que aconteceram no 2º e 3º encontros. Para resolver a primeira atividade (que foi adaptada da questão 15 da prova da OBMEP de 2015 nível 1, 1ª fase), os alunos acessaram o GeoGebraBook elaborado pela professora-pesquisadora com a imagem associada ao exercício. Através da manipulação do controle deslizante, os estudantes deveriam observar a sequência de figuras formadas, que lembram a letra Y. A cada etapa a imagem original era acrescida de três unidades de pontos. Na figura abaixo podemos observar as etapas da construção.

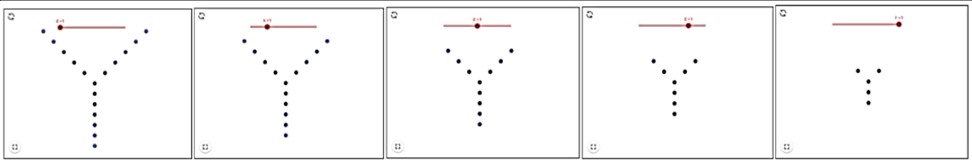
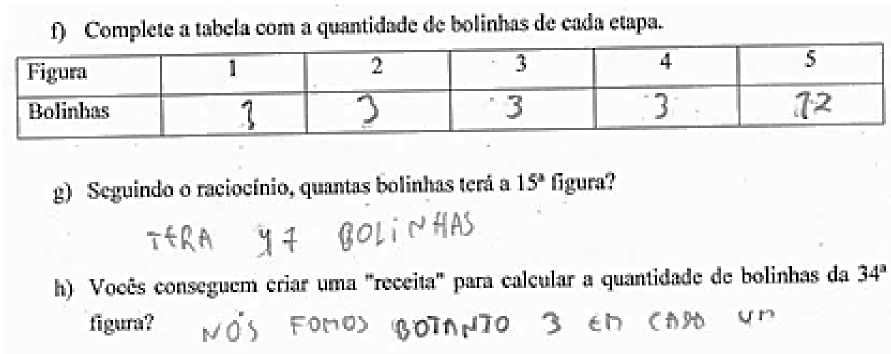


Figura 1: Figuras de cada etapa da sequência da questão 1

As primeiras questões dessa atividade, perguntavam quantas bolinhas haviam sido adicionadas em cada etapa, e quantas bolinhas no total haviam sido adicionadas no final da 5ª e última etapa disponível para manipulação no GeoGebra. Os oito grupos observaram as imagens e responderam corretamente o que foi perguntado. Propusemos essas primeiras questões com o objetivo de encaminhar os alunos no desenvolvimento do raciocínio necessário para as generalizações das questões seguintes. Quando solicitado que uma tabela fosse preenchida com a quantidade total de bolinhas em cada etapa, apenas dois grupos não responderam corretamente.



f) Complete a tabela com a quantidade de bolinhas de cada etapa.

Figura	1	2	3	4	5
Bolinhas	1	3	3	3	12

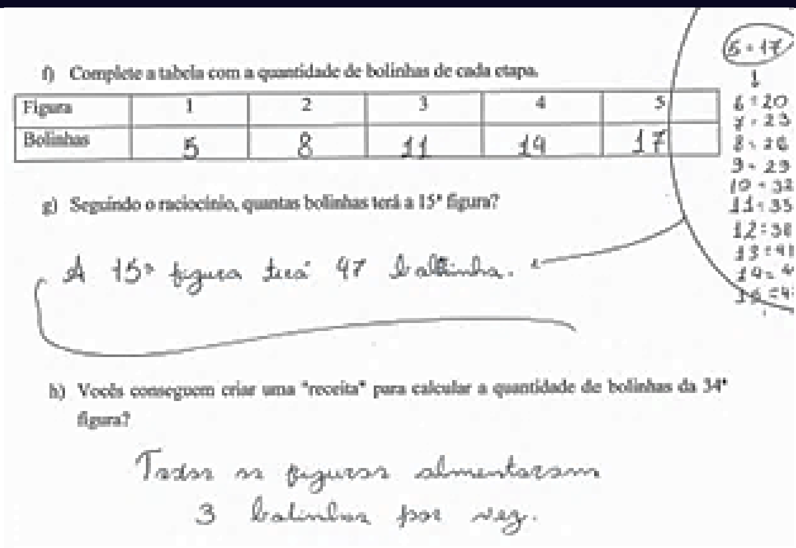
g) Seguindo o raciocínio, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

TERA 47 BOLINHAS

h) Vocês conseguem criar uma "receita" para calcular a quantidade de bolinhas da 34ª figura? NÓS FOMOS BOTANDO 3 EM CADA UM

Figura 2: Resolução grupo 4

Analisando a resolução do grupo 4, fica evidente que houve uma falha de interpretação para a construção da tabela, visto que os estudantes preencheram com os valores obtidos nos questionamentos anteriores. Embora o preenchimento da tabela tenha sido equivocado, nas questões seguintes os estudantes conseguiram desenvolver o raciocínio necessário para encontrar a resposta correta. Indo ao encontro das habilidades listadas por Canavarro, os alunos utilizaram uma linguagem natural para expressar o raciocínio generalizador. Vale ressaltarmos que proposta de utilização da tabela para organizar as informações traz uma maneira convencional, segundo Canavarro, de organizar o pensamento algébrico, relacionando as duas variáveis da questão, que são as etapas e a quantidade de bolinhas.



f) Complete a tabela com a quantidade de bolinhas de cada etapa.

Figura	1	2	3	4	5
Bolinhas	5	8	11	14	17

5 = 17
6 = 20
7 = 23
8 = 26
9 = 29
10 = 32
11 = 35
12 = 38
13 = 41
14 = 44
15 = 4

g) Seguindo o raciocínio, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

A 15ª figura terá 47 bolinha.

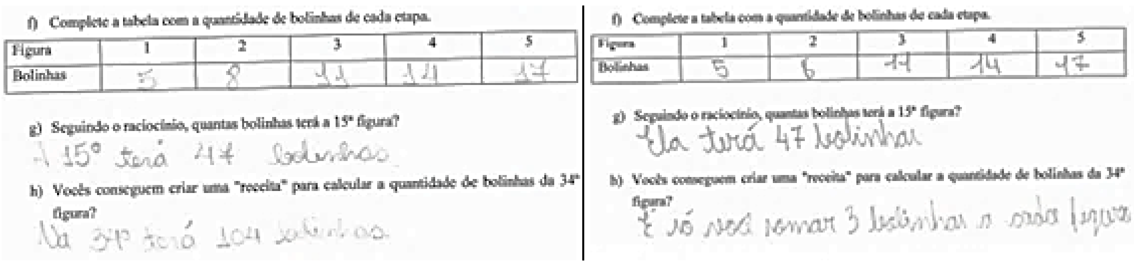
h) Vocês conseguem criar uma "receita" para calcular a quantidade de bolinhas da 34ª figura?

Todas as figuras almentaram 3 bolinhas por vez.

Figura 3: Resolução grupo 3

Quando perguntamos quantas bolinhas terá a 15ª figura, os estudantes do grupo 3 apresentaram como resposta a construção da sequência aritmética de etapas uma a uma. As etapas a partir da sexta estão na coluna, observamos que os estudantes adicionaram 3 unidades a cada etapa, construindo um processo de generalização aritmética, eles obteram resposta correta. Identificamos que a resposta dos estudantes encontra respaldo no que a autora cita, expressando a generalização por recorrência, porém, sem determinar um termo geral.

A resposta do grupo 4, assim como a do grupo 3, também sugere que os estudantes calcularam através de uma soma, etapa a etapa, ao invés de criarem uma lei. A receita dessa lei também está expressa na linguagem natural.



f) Complete a tabela com a quantidade de bolinhas de cada etapa.

Figura	1	2	3	4	5
Bolinhas	5	8	11	14	17

g) Seguindo o raciocínio, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

A 15° terá 47 bolinhas

h) Vocês conseguem criar uma "receita" para calcular a quantidade de bolinhas da 34ª figura?

Na 34ª terá 104 bolinhas

f) Complete a tabela com a quantidade de bolinhas de cada etapa.

Figura	1	2	3	4	5
Bolinhas	5	6	11	14	17

g) Seguindo o raciocínio, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

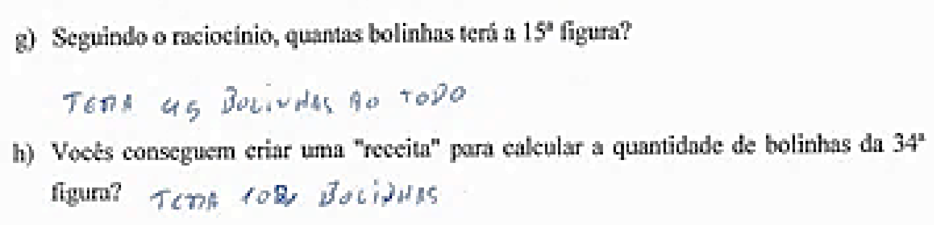
Ela terá 47 bolinhas

h) Vocês conseguem criar uma "receita" para calcular a quantidade de bolinhas da 34ª figura?

É só você somar 3 bolinhas a cada figura

Figura 4: Resolução do grupo 6 e do grupo 1

O grupo 6 não criou uma lei, mas calculou corretamente a quantidade de bolinhas da 34ª figura. Sem o registro, não identificamos a maneira que os estudantes organizaram essa contagem. A receita elaborada pela maioria dos grupos sugere que eles utilizaram a generalização por recorrência. Acreditamos que eles utilizaram somas sucessivas, calculadas uma a uma para encontrarem a resposta correta.


g) Seguindo o raciocínio, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

TERÁ 45 BOLINHAS AO TODO

h) Vocês conseguem criar uma "receita" para calcular a quantidade de bolinhas da 34ª figura? TERÁ 102 BOLINHAS

Figura 5: Resolução grupo 8

Já no grupo 8, supomos que os estudantes tenham realizado o produto de 15 por 3 para encontrar 45 como resposta, já que foi solicitado o número de bolinhas da 15ª etapa e a cada etapa são acrescidas 3 bolinhas. O mesmo raciocínio eles utilizaram para calcular a quantidade de bolinhas da 34ª figura, pois 102 é o resultado do produto de 34 por 3. Embora o resultado esteja errado, observamos que os estudantes de ambos os grupos generalizaram as adições sucessivas, realizadas pelos outros grupos, através da multiplicação. Assim, entendemos que o raciocínio algébrico está presente na maneira de pensar desses estudantes.

Observamos, de acordo com as habilidades apontadas por Canavarro, que os estudantes: identificam a estrutura matemática da situação em análise; estabelecem relações numéricas entre as duas variáveis em causa; generalizam uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência, em linguagem natural, mas sem justifica-la; expressam a generalização por recorrência de maneira correta, utilizando sucessivas somas; os grupos 2 e 8 conseguiram realizar uma generalização através do termo geral, utilizando o produto, mas não de maneira correta.

A segunda questão analisada, é adaptada de Sessa (2005). Os estudantes deveriam observar a sequência de figuras impressas formadas pelos palitos de fósforo e responder alguns questionamentos. Esses questionamentos, assim como os da questão anterior, foram propostos com o objetivo de ajudar os alunos a identificarem o que acontece com a sequência, buscando um padrão na construção.

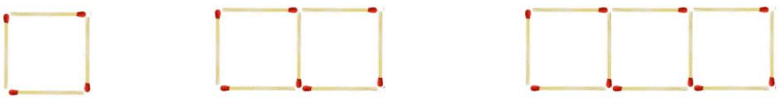


Figura 6: Sequência proposta na segunda questão

Nem todos os oito grupos responderam corretamente a primeira pergunta, “qual a quantidade de fósforos adicionada a cada etapa?”, o grupo 7 respondeu que a quantidade adicionada foi 4 e o grupo 6 identificou quantos palitos haviam em cada etapa, mostrando falta de compreensão na interpretação do questionamento. A segunda pergunta: “qual a quantidade necessária de fósforos para construir a figura que ocuparia o 6º lugar?", exigia que os alunos desenhassem até a figura que ocuparia o 6º lugar ou que organizassem uma maneira de contar os palitos, sem o desenho. Três grupos que responderam corretamente, mas estes grupos não deixaram claro a maneira que pensaram para responder à questão, entendemos melhor o raciocínio deles analisando as questões seguintes. Outras respostas que apareceram foram 12, 20 e 24 palitos. Vamos interpretar a maneira que os estudantes chegaram a esses resultados.

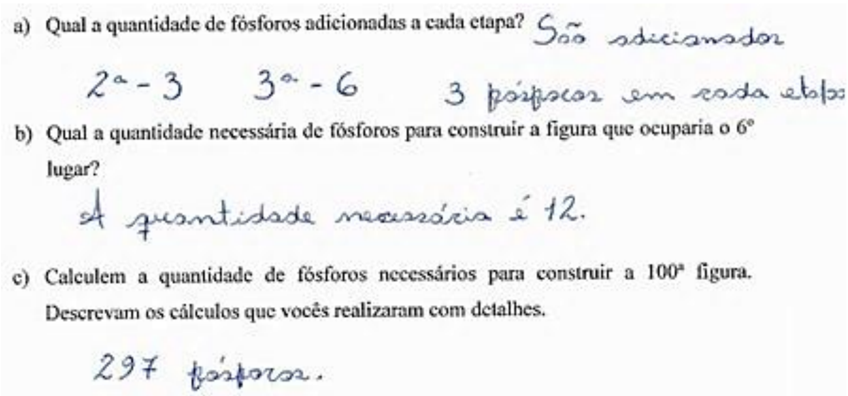

a) Qual a quantidade de fósforos adicionadas a cada etapa? São adicionados
2ª - 3 3ª - 6 3 fósforos em cada etapa
b) Qual a quantidade necessária de fósforos para construir a figura que ocuparia o 6º lugar?
A quantidade necessária é 12.
c) Calculem a quantidade de fósforos necessários para construir a 100ª figura. Descrevam os cálculos que vocês realizaram com detalhes.
297 fósforos.

Figura 7: Resolução grupo 3

Compreendemos que os estudantes do grupo 3 cometeram um erro de interpretação da pergunta, ao encontrar 12 como resposta, acreditamos que o cálculo realizado tenha sido 2 vezes 6, pois no item a os estudantes responderam corretamente e observaram que na 3ª etapa são adicionados 6 palitos, então no 6º lugar concluíram que a resposta seria o dobro. No item seguinte, entendemos que eles calcularam 3 vezes 99, mas esqueceram de somar a quantidade de palitos presente na primeira etapa. Fica evidente que os estudantes organizaram uma forma diferente de raciocínio para responder qual a quantidade de fósforos da 100ª figura. O que a professora-pesquisadora observou durante o encontro, foi que os grupos já não estavam mais calculando etapa a etapa, pois 100 seria um número muito grande para isso, eles buscavam padrões para calcular através de multiplicações, criando uma receita.

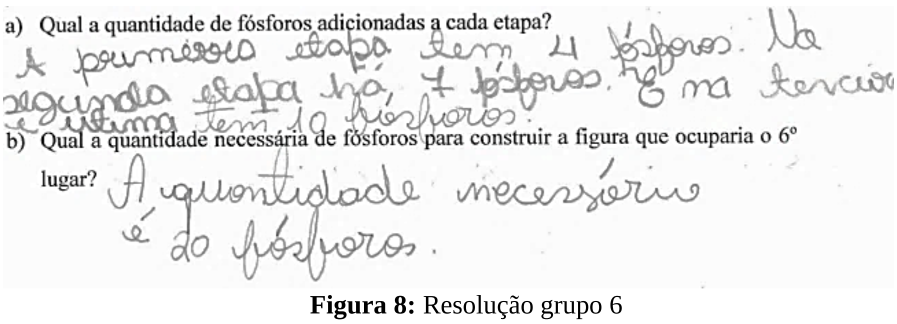
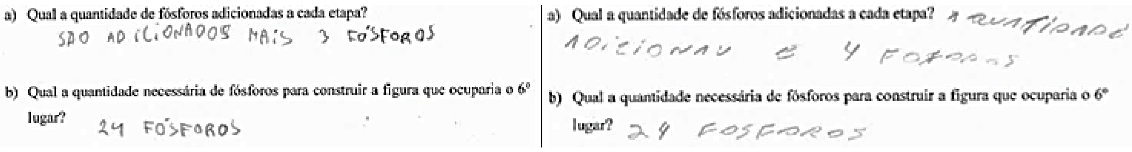

a) Qual a quantidade de fósforos adicionadas a cada etapa?
A primeira etapa tem 4 fósforos. Na segunda etapa há, 7 fósforos. E na terceira e última tem 10 fósforos.
b) Qual a quantidade necessária de fósforos para construir a figura que ocuparia o 6º lugar?
A quantidade necessária é 20 fósforos.

Figura 8: Resolução grupo 6

Ao analisarmos a resolução do grupo 6, entendemos que os estudantes dobraram a quantidade de palitos da 3ª etapa, para encontrar a quantidade necessária de palitos para construir a figura do 6º lugar, encontrando 20 como resposta.


a) Qual a quantidade de fósforos adicionadas a cada etapa? SÃO ADICIONADOS MAIS 3 FÓSFOROS

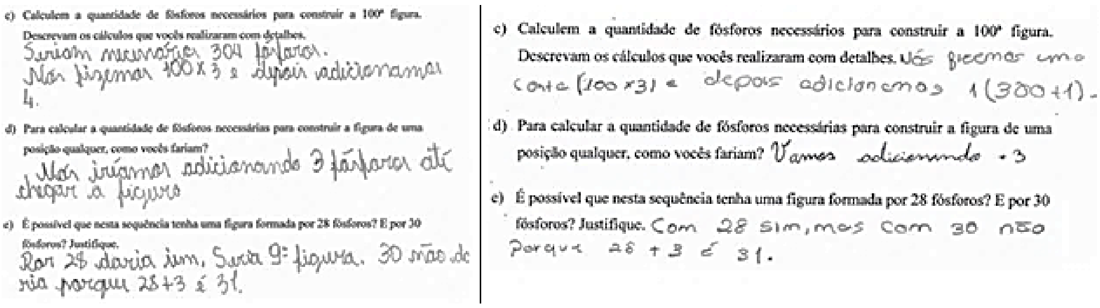
b) Qual a quantidade necessária de fósforos para construir a figura que ocuparia o 6º lugar? 24 FÓSFOROS

a) Qual a quantidade de fósforos adicionadas a cada etapa? A QUANTIDADE ADICIONADA É 4 FÓSFOROS

b) Qual a quantidade necessária de fósforos para construir a figura que ocuparia o 6º lugar? 24 FÓSFOROS

Figura 9: Resolução grupo 4 e grupo 7

Já para a resolução do grupo 4, nossa interpretação para o cálculo é que realizaram o produto de 4 por 6. O grupo 7 encontrou o mesmo resultado, mas eles haviam respondido à questão anterior errada. Assim, entendemos que eles realizaram o mesmo cálculo. Ainda que o resultado final não corresponda ao resultado esperado, o processo generalização está presente nas respostas apresentadas e fica evidente a tentativa de encontrar uma fórmula para facilitar os cálculos.


c) Calculem a quantidade de fósforos necessários para construir a 100ª figura. Descrevam os cálculos que vocês realizaram com detalhes. Seriam necessários 304 fósforos. Nós fizemos 100 x 3 e depois adicionamos 4.

d) Para calcular a quantidade de fósforos necessárias para construir a figura de uma posição qualquer, como vocês fariam? Nós iríamos adicionando 3 fósforos até chegar a figura

e) É possível que nesta sequência tenha uma figura formada por 28 fósforos? E por 30 fósforos? Justifique. Com 28 daria sim, seria 9ª figura. 30 não daria porque 28+3 é 31.

c) Calculem a quantidade de fósforos necessários para construir a 100ª figura. Descrevam os cálculos que vocês realizaram com detalhes. Nós fizemos uma conta (100 x 3) e depois adicionamos 1 (300+1).

d) Para calcular a quantidade de fósforos necessárias para construir a figura de uma posição qualquer, como vocês fariam? Vamos adicionando +3

e) É possível que nesta sequência tenha uma figura formada por 28 fósforos? E por 30 fósforos? Justifique. Com 28 sim, mas com 30 não porque 28 + 3 é 31.

Figura 10: Resoluções dos grupos 1 e 5

Os grupos 1 e 5 conseguiram organizar e escrever suas ideias. Além deles explicarem melhor suas maneiras de pensar, conseguiram colocar no papel esse raciocínio, usando suas linguagens habituais. Essa evolução na escrita foi observada ao longo dos encontros. Observamos que o grupo 1 esqueceu de descontar a 1ª figura, que não foi acrescida de 3 palitos. Já o grupo 5 criou a seguinte lei: $P = n \times 3 + 1$, na qual P representa a quantidade de palitos na etapa n.

Observamos, na segunda questão analisada, de acordo com as habilidades apontadas por Canavarro, que os estudantes: identificam a estrutura matemática da situação em análise; estabelecem relações numéricas entre as duas variáveis em causa; generalizam uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência, em linguagem natural, mas sem justifica-la;

conseguiram expressar a generalização por recorrência e apresentaram indícios de que haviam encontrado uma regra para calcular.

5. Considerações finais

Apresentamos aqui as conclusões parciais do estudo. Buscamos, nos dados produzidos, interpretar a maneira que os alunos estão pensando a partir das conclusões que eles conseguiram explicitar em cada questionamento, independente da resposta estar correta ou não. Entendemos que mesmo os erros cometidos pelos estudantes na resolução das questões nos mostram que o pensamento algébrico existe. Através das análises das resoluções das atividades propostas, podemos compreender melhor a aprendizagem dos conceitos algébricos, pois as resoluções dos estudantes nos mostram que o pensamento algébrico está presente nas suas maneiras de pensar, e nas maneiras de organizarem o pensamento; e que grande parte dos recursos utilizados por eles abordam a generalização da aritmética, através de sucessivas somas. Indicando um importante caminho para a introdução da álgebra. Neste relato de experiência apresentamos uma metodologia para o ensino e aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental por meio de tecnologias, entendemos que a formação algébrica poderá contribuir na alfabetização matemática dos estudantes na pós-pandemia, e que as eventuais defasagens podem ser minimizadas a partir das atividades propostas neste estudo.

6. Referências

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante Revista de Investigação em Educação Matemática**, Lisboa, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007.

PAPERT, S. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. ed. rev. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SESSA, C. **Iniciación al estudio didáctico del Álgebra**. 1a. ed. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2005.