

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES PELA PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL (ANOS FINAIS): UMA PROPOSTA DE ENSINO COM AS BARRAS DE CUISENAIRE – RELATO DE EXPERIÊNCIA

Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental¹

Luciane Thiele²

Arthur Belford Powell³

Tiago Emanuel Kluber⁴

Resumo

O presente trabalho é um recorte de uma pesquisa de mestrado em andamento no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECM), da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Apresentamos aqui um relato de experiência de duas das atividades realizadas em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental (anos finais), que aconteceram em uma escola pública da região oeste do Paraná. Objetivamos expor e discutir os resultados das produções dos estudantes no desenvolvimento das atividades que abrangem as operações de adição e subtração de frações pela perspectiva de medição, nas quais, foram utilizadas as barras de Cuisenaire para o ensino deste conteúdo. Essas ações tornaram as aulas mais motivadoras e os alunos mostraram-se mais ativos e participantes, o que colabora positivamente para a abstração do conceito, considerando também, a mediação do professor.

Palavras-chave: Frações; Perspectiva de medição; Cuisenaire.

1.Introdução

¹ Todos os trabalhos, experiências e atividades a serem desenvolvidas no III ENOPEM estarão alinhadas as 10 Temáticas a seguir:

1. Competências e Habilidades de Matemática na BNCC
2. Ensino e Aprendizagem de Matemática na Educação Infantil
3. Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental
4. Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental
5. Ensino e Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio
6. Ensino e Aprendizagem de Matemática no Ensino Superior
7. Produtos Educacionais relacionados aos processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática – PROFMAT;
8. Tendências didático-metodológicas da Educação Matemática para a Educação Básica;
9. Tecnologias Digitais na Prática dos Professores que Ensinam Matemática na Educação Básica
10. Ensino de Matemática em diferentes Modalidades e Contextos Sociais

² Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECM-Unioeste);
luciane_thiele@hotmail.com.

³ The State University of New Jersey; powellab@newark.rutgers.edu.

⁴ Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste); tiagokluber@gmail.com.

Percebemos pela nossa experiência como docentes, a dificuldade dos alunos dos sextos anos em lidar com os números fracionários, visto que, eles já usufruíram de um primeiro contato nos anos anteriores com este tipo de representação numérica. Outros pesquisadores também pontuam esta dificuldade, como Bertoni (2009) que afirma que frações é um dos conteúdos que mais os alunos apresentam dificuldades, considerando os baixos rendimentos em avaliações externas.

Sabemos que frações não tem somente um significado, uma forma de interpretar. Este conteúdo pode ser abordado de maneiras distintas, como: parte-todo, quociente, razão, operador multiplicativo e medida (KIEREN, 1980; SCHEFFER; POWELL, 2020). Observando o que recomenda o Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP, 2019) podemos dizer que o ensino de frações no sexto ano, deve ser orientado exclusivamente pela interpretação parte/todo. No entanto, há diversas pesquisas que defendem o ensino e a aprendizagem de frações associadas à ideia de medida, uma vez que precede a estruturação da ideia de parte/todo, citamos aqui duas delas: Design Research in Mathematics Education: Investigating a Measuring Approach to Fraction Sense (POWELL; ALI, 2018) e Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: Uma Ontologia baseada na História e Neurociência (POWELL, 2018). Com esse alinhamento, na proposta de ensino que ora relatamos, damos ênfase à última interpretação para os números fracionários: como resultado de uma medição.

Para Powell (2019, p. 54):

A medição resulta de uma comparação proporcional de uma quantidade com uma outra da mesma espécie, que é considerada como a unidade de medida. Portanto, um número é realizado dessa comparação multiplicativa, sendo que a quantidade indica a extensão da sua magnitude.

Assim, o ensino de fração pela perspectiva da medição, é respaldado na ideia de magnitudes, mas para isso precisamos determinar uma unidade de medida. Esta unidade de medida é de suma importância, pois o estudante terá que *decidir* qual unidade de medida irá utilizar para medir certo comprimento; ele chegará a um resultado, uma quantidade, o qual representa o número de iterações necessárias para medir este comprimento. Esta ação de comparação de uma quantidade em questão, em comparação com outra chamada de unidade de medida, é o que leva à percepção da magnitude.

Assim, assumindo as ideias defendidas por Powell, conforme citado anteriormente, trabalhamos com os alunos frações como sendo uma medida, e para isto utilizamos as barras

de Cuisenaire para realização das atividades, pois elas, nos possibilitam comparar ou medir quantidades contínuas. Sob este panorama, Gattegno (1974/2010, p. 196, tradução nossa) reforça a importância do trabalho com as barras para trabalhar frações pela perspectiva de medição:

A medida, no trabalho com as barras, é emprestada da física e introduz a contagem pela porta dos fundos, pois é necessário saber quantas vezes a unidade foi usada para associar um número a um determinado comprimento. Mas a medida também é a fonte de frações e números mistos e serve mais tarde para introduzir números reais. Assim, a medida é uma ferramenta mais poderosa que a contagem, no qual é usada como gerador de matemática. Contar pode ser interpretado novamente como sendo uma medida com barras brancas. Medir também é naturalmente uma interpretação da iteração.

O conjunto das barras de Cuisenaire é composto por dez barras de diferentes cores e magnitudes. Cada barra corresponde a um número exato de barras brancas, e, entre as outras barras, também encontramos outras correspondências. Uma classe destas correspondências revela uma relação multiplicativa entre as barras e que auxiliam no nosso trabalho com as frações.

Tomando essa direção, este trabalho tem por objetivo apresentar os resultados das produções dos estudantes do 6º ano, no desenvolvimento de duas atividades que abrangem as operações de adição e subtração de frações pela perspectiva de medição. Para o desenvolvimento das atividades foram utilizadas as barras de Cuisenaire.

2. Sobre a experiência vivida

O presente trabalho é um recorte de uma pesquisa em andamento do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECM). Apresentaremos de forma detalhada, duas das atividades envolvendo as operações de adição e subtração de frações, realizadas com uma turma de 6º ano, no decorrer de uma aula de matemática de aproximadamente 50 minutos, no ano de 2021, na qual a primeira autora deste relato também era a professora da turma.

Para que faça sentido a utilização deste tipo de abordagem, os alunos já devem estar familiarizados com o material Cuisenaire, de modo que consigam estabelecer algumas relações entre as barras e tenham um entendimento sobre frações equivalentes. Era o caso desta turma, pois já havíamos trabalhado com o material este conceito. Para a realização das atividades os alunos foram divididos em duplas, em que cada uma, dispunha de um aglomerado de barras

para utilizarem no decorrer das aulas. A adição $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ foi a primeira a ser problematizada na aula. Cada aluno utilizando as barras deveria representar as frações lado a lado, conforme a figura 1.



Figura 1: Representação com as barras de Cuisenaire das frações $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$.
Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Após a construção das frações algumas discussões foram levantadas e gravadas ao longo da realização das atividades, como:

Professora: “Vocês conseguem realizar essa operação?”

Alunos: “Eu fiz a *Corrida das cores!*” “Não sei como começar!” “Soma 3 com 2 e 4 com 3?”

Professora: “Como podemos realizar essa operação?”

Alunos: “Eu também fiz a *Corrida das cores*, mas não sei o que fazer agora!” “A minha resposta deu 12/17, não sei o que eu fiz, mas deu isso!”

Professora: “Será que é possível juntar frações com unidades de medida diferentes?”

Alunos: “Acho que não!” “Não podemos!” (Neste momento alguns alunos tiveram *insights*, pois ao trabalhar a comparação das frações com as barras anteriormente, lembraram que não era possível comparar se as unidades de medida fossem diferentes, necessitando encontrar frações equivalentes, então deduziram que para operar deveriam seguir a mesma regra.)

Professora: “Como podemos transformar essas frações para que tenham unidades de medida iguais?”

Alunos: “Vamos utilizar o *jogo da Corrida das cores* para achar a unidade de medida comum!”

O processo de adição e subtração utilizando o material Cuisenaire é simples, é necessário encontrarmos uma unidade de medida comum (denominador comum) a estas frações para tornar possível esta adição. Para chegar a uma unidade de medida comum, trabalhamos o jogo *Corrida das cores*, jogo este, trabalhado anteriormente ao lidar com a equivalência de frações. Este jogo, foi retirado do livro: *Fração à moda antiga*, dos autores Camila Augusta do Nascimento Amaral, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza e Arthur Belford Powell (2021), que consiste em posicionar duas barras de cores diferentes, representadas pelas unidades de medida das frações que se deseja comparar os comprimentos: neste caso usamos os quartos e terços, representados pelas cores roxas e verdes (barras da direita).

Inicialmente posicionamos a barra roxa e verde clara (nossas unidades de medida) lado a lado, com uma de suas extremidades pareadas/alinhadas (Figura2).



Figura 2: Barras com uma das extremidades pareadas.

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

O objetivo do jogo é o de igualar os comprimentos das colunas das duas cores de barras adicionando tantas barras de cada cor, quantas forem necessárias, até que os comprimentos das duas colunas sejam iguais, começando pela barra menor (Figura 3).



Figura 3: Comprimento das colunas iguais

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Em seguida, verificamos a quantidade de barras inseridas de cada cor em cada coluna, e, sabendo a relação de cada cor da barra com a quantidade de barras brancas, podemos determinar a unidade de medida das duas frações fazendo a correspondência em barras brancas, neste caso 12.

Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas:

Professora: “Qual é a unidade de medida comum a terços e quartos, utilizando as barras brancas como medida?”

Alunos: “12!”

Professora: “Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número?”

Alunos: “4!”

Professora: “Quantas barras roxas foram necessárias para atingir esse número?”

Alunos: “3!”

Realizamos o mesmo trabalho com as outras barras (numerador). Considerando a fração $\frac{3}{4}$, como já tínhamos uma barra roxa (nossa unidade de medida) dispomos mais duas, igualmente devemos adicionar duas barras ao lado esquerdo, neste caso, adicionamos duas barras de cor verde clara, conforme a figura 4.



Figura 4: Adicionando duas barras verdes claras ao numerador (barras da esquerda)

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas:

Professora: “Ao lado esquerdo do *trem*⁵ contendo as 3 barras roxas posicionem essa mesma quantidade de barras verdes claras. Qual medida o *trem* verde claro representa do *trem* roxo?”

Alunos: “ $\frac{9}{12}$!”

Com a fração $\frac{2}{3}$ procedemos da mesma maneira. Como adicionamos três barras verdes claras a nossa unidade de medida, devemos adicionar três barras vermelhas ao numerador (Figura 5).



Figura 5: Adicionando três barras vermelhas ao numerador (barras da esquerda)

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas:

Professora: “Ao lado esquerdo do *trem* contendo as 4 barras verdes claras posicionamos essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o *trem* vermelho representa do *trem* verde claro?”

⁵ Chamamos de *trem*, uma única barra ou uma barra ligada a outra pela ponta. Podem ser dispostas na horizontal ou na vertical.

Alunos: “ $\frac{8}{12}$!”

Logo, a fração $\frac{3}{4}$ se transformou na fração $\frac{9}{12}$ e a fração $\frac{2}{3}$ se transformou na fração $\frac{8}{12}$, encontramos assim, uma fração equivalente a cada fração dada (Figura 6).

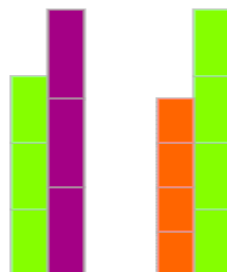


Figura 6: Frações equivalentes as frações iniciais

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas:

Professora: “E agora, quanto é $\frac{9}{12} + \frac{8}{12}$?”

Alunos: “ $\frac{17}{12}$!”

Com unidades de medida iguais, basta juntarmos os numeradores (barras da esquerda), totalizando $\frac{17}{12}$, conforme a figura abaixo, onde representamos a unidade de medida 12, com uma barra laranja e uma vermelha.



Figura 7: Resultado da adição de $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Resolvendo esta adição utilizando a abordagem aritmética, temos: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$.

Realizando uma análise entre os dois tipos de abordagens, na abordagem aritmética primeiramente encontramos o mínimo múltiplo comum das frações, de forma análoga,

utilizando as barras, também encontramos o mínimo múltiplo comum, ao qual denominamos de *unidade de medida comum*. Esta unidade comum encontramos quando adicionamos barras iguais em ambas as colunas (trens) para que tenham a mesma medida, esta igualdade acontece quando o tamanho da pilha/coluna é 12, o mesmo valor encontrado no processo aritmético.

Após encontrarmos o mínimo múltiplo comum, na abordagem aritmética, encontramos outras frações equivalentes à fração inicial, mas que tenham denominador 12. Observando a figura 6, temos três barras verdes claras e quatro roxas que totalizam a fração $\frac{9}{12}$, representando a fração inicial $\frac{3}{4}$; quatro barras vermelhas e quatro verdes claras que representam $\frac{8}{12}$, representando a fração inicial $\frac{2}{3}$. Agora com as frações equivalentes com os mesmos denominadores, basta adicionarmos os numeradores (Figura 7).

O processo de subtração é símile ao da adição. Utilizamos a subtração $\frac{4}{3} - \frac{1}{6}$. Novamente recorremos a *Corrida das cores* e neste caso entre terços e sextos. Lado a lado, colocamos a barra verde clara e a verde escura. Adicionamos barras verdes claras e verdes escuras até atingirem o mesmo comprimento nas colunas. Logo, utilizamos mais uma barra verde clara e assim já alcançamos o mesmo comprimento da barra verde escura (Figura 8), não necessitando dispor mais barras.



Figura 8: Jogo da *Corrida das cores* entre terços e sextos
Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas:

Professora: “Como podemos resolver?”

Alunos: “Começamos pela *Corrida das cores* para descobirmos a unidade comum, assim não “dá” de resolver!” “Precisamos usar a *Corrida das cores*!”

Professora: “Qual é a unidade de medida comum a terços e sextos, utilizando as barras brancas?”

Alunos: “6!”

Professora: “Quantas barras verdes claras foram necessárias para atingir esse número?”

Alunos: “Duas!”

Professora: “Quantas barras verdes escuras foram necessárias para atingir esse número?”

Alunos: “Uma!”

Neste caso nossa unidade comum é o próprio 6. Aqui destacamos aos alunos que uma barra verde clara é $\frac{1}{2}$ da barra verde escura, ou seja, precisamos duas barras verdes claras para ter uma verde escura, reforçando a propriedade multiplicativa entre as barras.

Realizamos o processo com os numeradores agora. Tomando a fração $\frac{4}{3}$ adicionamos uma barra roxa à fração. Já na fração $\frac{1}{6}$ não foi necessário, pois não adicionamos barras a unidade de medida, no caso à barra verde escura (Figura 9).

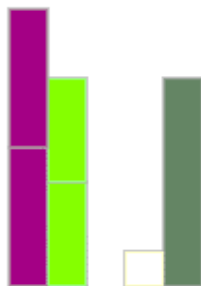


Figura 9: Jogo da Corrida das cores entre terços e sextos

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

Questionamentos realizados em sala de aula e suas respectivas respostas:

Professora: “Ao lado esquerdo do trem contendo as duas barras verdes claras posicionem essa mesma quantidade de barras roxas. Qual medida o trem roxo representa do trem verde claro?”

Alunos: “ $\frac{8}{6}$!”

Professora: “Em relação a fração $\frac{1}{6}$ foi necessário adicionar barras?”

Alunos: “Não, pois a barra verde escura já representa seis brancas!” “Não, pois duas barras verdes claras tem o mesmo tamanho de uma barra verde escura!” “Não, pois uma barra verde escura é 6 e duas verdes claro é 6 também!”

Professora: “E agora quanto é $\frac{8}{6} - \frac{1}{6}$?”

Alunos: “ $\frac{7}{6}$!”

A fração $\frac{4}{3}$ se transformou na fração equivalente $\frac{8}{6}$ e a fração $\frac{1}{6}$ continuou sendo $\frac{1}{6}$. Como as unidades de medida são iguais, basta calcularmos a diferença, $\frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ (Figura 10). Visualmente, junto com os alunos contamos quantas barras brancas são necessárias para completar *do 1 até chegar no 8*, ou seja, *quanto falta* de $\frac{1}{6}$ para chegar no $\frac{8}{6}$, esta é a diferença entre as duas frações.



Figura 10: Quanto falta de $\frac{1}{6}$ para chegar na fração $\frac{8}{6}$.

Fonte: Elaborada pelos autores em <https://www.elasticmind.com/rodsY/>

3.Retomando o vivido reflexivamente

Esta atividade foi possível uma vez que os alunos já tiveram o contato com as barras anteriormente em outras atividades, como: de comparações e equivalência de frações. Em relação à primeira atividade, como o jogo da *Corrida das cores* já era do conhecimento dos alunos, ao serem submetidos as operações, a maioria dos alunos chegaram à conclusão que não poderiam somar as frações daquela forma, pois estavam com unidades de medida diferentes. Outros tentaram adicionar os numeradores e depois os denominadores, mas ao serem questionados, pedindo que explicassem seu raciocínio, disseram que não seria possível operar desta maneira.

Ao adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes, reforça-se o trabalho com: as frações equivalentes, a comparação das frações e o jogo da *Corrida das cores*, por isso da importância de ser trabalhado anteriormente estes conceitos.

No decorrer das atividades, entenderam que a unidade de medida comum, era na verdade o mínimo múltiplo comum que já haviam estudado. Após a familiarização com o material, muito antes de montar a *Corrida das cores* eles já calculavam a unidade comum, facilitando o

trabalho com as barras. Isso indica que o mínimo múltiplo comum pode ser trabalhado como um resultado sintetizador da medição, possuindo um significado de medição.

Ao trabalhar desta maneira, não utilizamos de início a nomenclatura *numerador* e *denominador*, assim, ao nos referirmos ao denominador usamos a terminologia *unidade de medida*. Essa unidade de medida é de suma importância, pois o estudante terá que decidir qual unidade é a mais adequada para medir certo comprimento, ao qual representará o número de iterações necessárias para medi-lo. Por exemplo para representar a fração $\frac{1}{2}$, podemos utilizar uma barra vermelha e uma roxa (que também representa $\frac{2}{4}$); uma roxa e uma marrom; uma verde clara e uma verde escura; observando que ainda existem outras opções. Ao trabalhar desta forma, os alunos recorrem ao conceito de equivalência de frações, que é construído sem mesmo ter necessidade de a professora realizar alguma intervenção explícita, é inerente à solução procurada.

Outra questão que também merece destaque, ao trabalhar com as barras notamos nos alunos a facilidade em construir as frações, inclusive as impróprias, cujo numerador é maior que a unidade de medida.

4.Considerações Finais

Este trabalho se propôs a descrever uma proposta de ensino envolvendo a adição e subtração de frações, proporcionando experiências para a construção cognitiva de seu conceito com o auxílio de materiais manipulativos concretos.

Observamos que para a compreensão do conceito de frações pela perspectiva de medição é necessário um tempo maior comparado com o ensino pela perspectiva de partição, mas, não consideramos isso como uma limitação do estudo, pois possibilitamos através da construção com as barras o estabelecimento de um significado para as operações com frações que pode ser mais duradouro.

É relevante destacar a reação das crianças a serem submetidas a estas atividades, visto que não era parte de sua rotina realizá-las com o auxílio de algum material manipulável. Isto causou uma maior inquietação na turma ao longo da implementação das atividades, mas, com resultados satisfatórios conforme o observado no decorrer das atividades.

Atividades como estas tornam a rotina da aula mais interessante e significativa. De acordo com o observado durante as aulas, percebemos que este tipo de perspectiva enriquece o desenvolvimento do senso fracionário, possibilitando que conceitos como de frações impróprias e de equivalência de frações sejam facilmente visualizados e efetivamente construídos.

5.Referências

AMARAL, Camila. A. N. A.; SOUZA, Maria. A. V. F de.; POWELL, Arthur. B. **Fração à moda antiga**. 1º ed. Vitória: Edifes, 2021. 114p.

BERTONI, Nilza. E. **Educação e Linguagem Matemática IV Frações e Números Fracionários**. Curitiba: PEDEad, 2009. 95 p. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/files/fracoes.pdf>. Acesso em: 16 Jul. 2021.

GATTEGNO, Caleb. **The Common Sense of Teaching Mathematics**. New York: Educational Solutions Worldwide, 1974/2010.

KIEREN, Thomas. E. The Rational Number Construct: Its Elements and Mechanisms. In: KIEREN, T. (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, p. 125-150, 1980.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**, 2019. Curitiba, PR: SEED/PR. Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep_matematica_2021_anos finais.pdf. Acesso em: 12 fev. 2022.

POWELL, Arthur. B.; ALI, Kendell. V. Design Research in Mathematics Education: Investigating a Measuring Approach to Fraction Sense. In: CUSTÓDIO, J. F. *et al.* (org.). **Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT): Contribuições para Pesquisa e Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, p. 221-242, 2018.

POWELL, Arthur B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. **Revista de Matemática, Ensino e cultura (REMATEC)**, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018.

_____. Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. **RIPEM: Revista Internacional de Pesquisa em Educação matemática**, v. 9, n. 2, p. 50-68, 2019.

SCHEFFER, Nilce F.; POWELL, Arthur B. Frações na Educação Básica: O que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 20, 2020.