

RESOLUÇÃO DE SISTEMA DE CONGRUÊNCIAS LINEARES

Ensino e Aprendizagem de Matemática no Ensino Superior – III ENOPEM¹

Marceli Adamski Carvalho²

Prof. Dr. Wender José de Souza³

Resumo

A Teoria dos Números é um ramo da Matemática que se dedica a estudar as propriedades e as relações entre os números inteiros, em particular, estudamos a aritmética dos restos. Diante disso, este trabalho propõe a resolução de Sistema de Congruências Lineares em uma ou duas variáveis, através de diferentes técnicas de resolução. Dessa forma, iniciamos com uma abordagem histórica acerca do tema Números Inteiros para, posteriormente, verificamos se esse conteúdo é apresentado na BNCC e, caso seja, como é abordado. Em seguida, faremos uma fundamentação teórica da Teoria dos Números, especialmente, sobre congruências e Sistema de Congruências Lineares. Observa-se que, o conteúdo trazido na maioria dos materiais que trata sobre Sistema de Congruências é tratado de forma bem direta, com poucos exemplos práticos e um número inexpressivo de detalhes. Com base nas observações levantadas, este trabalho traz um material de apoio com exemplos mais detalhados. Espera-se que este material possa servir de apoio e motivação para os professores, que atuam em diferentes níveis de ensino, em especial, na Educação Básica e na graduação que acreditam que devam ensinar além dos conteúdos propostos pelo currículo a fim de valorizar a formação integral de seus alunos.

Palavras chave: Números inteiros. Sistema de Congruências. Material de apoio.

1. Introdução

Desde o início da civilização, a Matemática já estava presente na vida do homem primitivo devido à necessidade de contar, registrar e operar com números. Ao longo da História, a Matemática foi sendo construída e aperfeiçoada, prosseguindo em constante

¹ Todos os trabalhos, experiências e atividades a serem desenvolvidas no III ENOPEM estarão alinhadas as 10 Temáticas a seguir:

1. Competências e Habilidades de Matemática na BNCC
2. Ensino e Aprendizagem de Matemática na Educação Infantil
3. Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental
4. Ensino e Aprendizagem de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental
5. Ensino e Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio
6. Ensino e Aprendizagem de Matemática no Ensino Superior
7. Produtos Educacionais relacionados aos processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática – PROFMAT;
8. Tendências didático-metodológicas da Educação Matemática para a Educação Básica;
9. Tecnologias Digitais na Prática dos Professores que Ensinam Matemática na Educação Básica
10. Ensino de Matemática em diferentes Modalidades e Contextos Sociais

² Universidade Federal de Jataí-UFJ, marcielecarvalho97@gmail.com

³ Universidade Federal de Jataí-UFJ, wender@ufj.edu.br

evolução, investigando novas situações e estabelecendo relações com os acontecimentos cotidianos.

Nesse sentido, a Teoria dos Números é o ramo da Matemática que tem por objetivo principal estudar as propriedades e relações entre os números inteiros. Neste trabalho nós restringimos à Aritmética: a parte que lida com os números e com as operações possíveis entre eles.

O presente trabalho tem como objetivo utilizar de diferentes técnicas para resolver Sistema de Congruências Lineares que admite solução, sendo uma delas o Teorema Chinês dos Restos. Dessa forma, para atingirmos este objetivo propomos elaborar um material de apoio, que contemple essas técnicas de resolução com o intuito de auxiliar os professores da Formação Geral Básica que queiram se aprofundar nos conceitos de Teoria dos Números, para alunos da graduação que cursam da disciplina de Introdução a Teoria dos Números, para alunos da pós-graduação na disciplina de Aritmética e pode ainda ser direcionado a aqueles que têm um pouco de familiaridade com a Teoria dos Números.

Embora Sistema de Congruência Lineares não seja trabalhado em sala de aula no Ensino Básico, a teoria necessária para sua compreensão é amplamente discutida nos anos finais do Ensino Fundamental.

Dentre os trabalhos desenvolvidos relacionados com o tema de estudo, este se difere dos demais por apresentar diferentes alternativas de resolução de Sistema de Congruências Lineares além de, resolver Sistema com duas variáveis. Outro ponto importante a destacar é o fato de que muitos materiais já publicados abordam a resolução de sistemas por meio do conceito de Classes Residuais mas se analisarmos o sumário de diferentes autores sobre a Teoria dos Números e seguindo a lógica dos cursos que ministram a disciplina de Introdução a Teoria dos Números o conceito de Classes Residuais é contemplado depois da Resolução de Sistema de Congruências o que dificulta a resolução.

Nesse sentido, buscamos no capítulo 5 elaborar um material de apoio que apresente soluções detalhadas (com todos os passos da resolução), explicativas (uma linguagem culta, porém acessível) e relacionadas com os conceitos já estudados além daqueles que foram abordados no capítulo anterior.

2. Fundamentação Teórica

2.2 Números Inteiros: contexto histórico

Os números surgiram inicialmente da necessidade do homem de contar e de, posteriormente, fazer registros e, por consequência, de operar. “Acredita-se que o processo de contar começou a ser desenvolvido pelo ser humano muito antes de haver escrita ou civilização e, por isso, possuímos poucos elementos concretos para sua análise”, (MOL, 2013, p.13).

A evolução da humanidade de uma vida primitiva para uma vida em sociedade incorporou novos desafios sociais e econômicos. “Novas demandas surgiram na organização do espaço, nas técnicas de produção e nas relações de natureza comercial. O homem se viu assim diante da necessidade de pensar numericamente”, (MOL, 2013, p.13).

Embora os números inteiros positivos componham o sistema matemático mais simples, o estudo de suas propriedades exerce grande fascínio na mente humana desde a Antiguidade, desafiando inúmeros estudiosos através de seus conceitos e propriedades que vão além de qualquer simplicidade.

Euler foi responsável pela divulgação da Teoria dos Números, mas o estudo de forma sistematizada, de forma metodológica, visando a elaboração do conhecimento, iniciou-se somente com o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada em 1801, quando tinha apenas 24 anos.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855), conhecido como o “príncipe da matemática”, foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência e desde cedo mostrava sua facilidade com números. Uma de suas obras que contribuiu para a Teoria dos Números foi *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigações Aritméticas) em 1801, ainda no início de sua carreira Matemática, que se transformou em um clássico da literatura Matemática. Nessa obra, Gauss introduz a noção de congruência, desenvolve a teoria dos resíduos quadráticos, demonstra a Lei da Reciprocidade quadrática entre outras contribuições. Já no primeiro capítulo do seu livro traz o conceito de congruência: e a notação que a torna uma técnica tão poderosa. Ou seja:

“Sejam a e b inteiros quaisquer e seja $m > 1$ um inteiro positivo fixo. Diz-se que a é congruente a b módulo m , se, e somente se, m divide a diferença $a - b$ ”. Gauss foi o primeiro a usar a notação $a \equiv b \pmod{m}$, para dizer que a é congruente a b módulo m .

Após as contribuições de Gauss a Teoria dos Números, podemos reescrever o Teorema sobre Congruências de Legendre, conhecido como “Teorema de Ouro”, da seguinte forma $x^2 \equiv q \pmod{p}$. Embora Gauss tenha contribuído para várias áreas do conhecimento, afirmou que “a matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas”.

Diante das grandes contribuições deixadas pelos matemáticos em cada época da história para a Teoria dos Números destacamos a teoria de congruências que se relaciona com o objeto de estudo deste trabalho.

2.3 A importância dos números inteiros no currículo

Neste tópico, faremos uma análise da BNCC (BRASIL, 2017), o documento que norteia a elaboração das diretrizes da Educação Básica, com o objetivo de verificar se é apresentado e como é abordado o tema Números Inteiros.

Segundo Resende (2017),

[...] A Teoria dos Números, ao ter como foco o estudo dos números inteiros, que é um campo propício para o desenvolvimento de atividades investigativas, pois a exploração de padrões e de relações numéricas, o uso da recursão e da indução Matemática, envolvendo os inteiros, a divisibilidade e números primos estiveram e estão presentes na Matemática e podem ser exploradas nas atividades escolares, em qualquer nível, (RESENDE, 2017, p. 209).

Nesse sentido, é importante verificarmos se a Teoria dos Números tem relevância no currículo da Educação Básica e o que as normativas orientam. Em 2017, com o objetivo de uniformizar a Educação Básica no Brasil, após um longo período de discussões entre pesquisadores, professores e sociedade através de audiências públicas, foi criada a BNCC (BRASIL, 2017). O documento determina as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da Educação Básica. Além disso, determina que essas competências, habilidades e conteúdos devem ser os mesmos, independentemente de onde as crianças, os adolescentes e os jovens moram ou estudam.

Dentre as oito competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental destacamos a que evidencia o campo da Aritmética:

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos,

desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, p. 267).

A BNCC (BRASIL, 2017) propõe cinco unidades temáticas que se correlacionam entre si, a que se refere a números, por estar ligada diretamente à Teoria Elementar dos Números tem como finalidade:

desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. [...] Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações, (BRASIL, 2017, p. 268).

A BNCC (BRASIL, 2017) enfatiza a importância da inserção gradativa da argumentação Matemática, por meio da leitura de textos para que se desenvolva o senso crítico em relação à argumentação utilizada. Porém, ao fazer um comparativo do 6º ao 9º ano, na unidade temática números, apenas no 7ª ano fica explícito o conceito de números inteiros, em objetos do conhecimento que abordam o uso, a história, a ordenação, a associação com pontos da reta numérica e as operações. Vale salientar, entretanto, que problemas relativos à teoria elementar dos números poderiam trazer o desenvolvimento de tal argumentação, com as discussões provenientes de suas resoluções.

Analisando se há continuidade do conceito de números inteiros no que se refere a Matemática para o Ensino Médio na BNCC (BRASIL, 2017), verificamos que, dentre as cinco competências específicas, a de número quatro menciona o termo Aritmética, dizendo que deve-se:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, aritmético, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, (BRASIL, 2017, p. 531).

Diante disso, podemos dizer que não há explicitamente uma preocupação em abordar os conceitos mais profundos da Teoria dos Números, ou seja, não é explorada de forma adequada no currículo da Educação Básica. Questionamos, a partir de então: é possível ensinar Aritmética dos Restos no Ensino Médio?

Uma proposta de currículo de Matemática para o Ensino Médio que aborde a temática Aritmética foi elaborada em 2014 pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) em conjunto com professores universitários e professores atuantes na Educação Básica. A proposta

considera quatro áreas do conhecimento: números e funções, geometria, Matemática discreta e tratamento da informação que permeiam as três séries do Ensino Médio, através de conteúdos-chaves que conduzirão à aquisição das habilidades esperadas. Em seguida, é apresentada por série cada área do conhecimento dividindo-se em: estrutura de tópicos, habilidades e recomendações. Além disso, dentro de cada área, acrescentamos ainda um bloco chamado “temas suplementares”, a fim de provocar uma discussão ao optar por uma proposta relativamente ousada sobre o tipo de ensino que se pretende oferecer (Científico, humanístico ou Geral).

A área do conhecimento Matemática Discreta para a 1ª série do Ensino Médio traz o tema aritmética com os seguintes conteúdos: 2.1. Divisão Euclidiana, discussão sobre diferentes algoritmos e procedimentos e suas relações com a estrutura do sistema posicional de numeração. 2.2. Divisibilidade e Resto: aritmética dos restos, múltiplos e divisores, números primos, fatoração e critérios de divisibilidade; 2.3. Máximo Divisor Comum; 2.4. Mínimo Múltiplo Comum. e nos temas suplementares: 2.1. Aritmética Modular, 2.2. Sistema de numeração posicional e mudança de base. Na proposta, fica evidente que é possível introduzir os conceitos de Aritmética dos Restos no Ensino Médio o que vem de encontro com o nosso entendimento acerca do tema.

Segundo Groenwald (2010) o estudo de tópicos da Teoria dos Números pode ser desenvolvido, na Educação Básica, de modo a

estimular nos alunos o interesse pela Matemática, aprimorando o raciocínio lógico e ampliando a compreensão dos conceitos básicos para o refinamento do pensamento aritmético e algébrico, fazendo com que os mesmos desenvolvam a capacidade de manipular conceitos e propriedades de forma clara e objetiva, (GROENWALD, 2010, p. 02).

De fato, acreditamos que introduzir aritmética dos restos no currículo da Educação Básica possibilitará desenvolver a capacidade dos alunos de pensar aritmética e algebricamente, de modo que sejam capazes de perceber que a matemática, não é apenas decorar fórmulas prontas e reproduzi-las para obtenção de resultados em exames e avaliações, mas sim, como um conjunto de ferramentas que podem ser adaptadas e utilizadas às mais diversas situações do seu cotidiano.

2.4 Resolução de Sistema de Congruências e suas aplicações

Neste tópico, daremos ênfase aos conceitos que, certamente, compõem o ponto principal do nosso trabalho.

2.4.1 Congruência módulo m

Em Matemática, o termo Congruência é muito conhecido e usado quando comparamos duas figuras geométricas – Em dois triângulos, por exemplo, dizemos que são congruentes se possuírem os mesmos elementos geométricos. Mas, em 1801, Carl F. Gauss aplicou a ideia de congruência aos números inteiros em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae* (Estudos de Aritmética), revolucionando a Teoria dos Números, (EVES, 2011, p.520).

De acordo com Hefez (2013, p.192), a definição de congruência é: seja m um número natural, diremos que dois inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros são congruentes módulo m , escreve-se $a \equiv b \pmod{m}$, se a relação for falsa, representa-se por: $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Para verificar se dois números inteiros a e b são congruentes módulo m , basta verificar se m divide a diferença entre eles, ou seja, $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m \mid a - b$.

2.4.2 Congruências Lineares

Congruências lineares são um tipo especial de congruência. Uma congruência linear poderá ter uma solução, várias soluções ou até mesmo não ter nenhuma solução. Apresentaremos um resultado que caracteriza todas as congruências lineares que têm solução.

De acordo com Hefez (2013, p.137), seja $m > 1$ um inteiro. Chamamos de congruência Linear a toda equação da forma, $ax \equiv b \pmod{m}$, onde a , b e x são inteiros, onde x são as soluções procuradas. Resta saber se toda congruência linear tem solução. Para isto, verificamos a condição de existência da solução. A congruência linear $ax \equiv b \pmod{m}$ possui solução se, e somente se, o máximo divisor comum de a e m divide b , ou seja, $ax \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a, m) \mid b$.

2.2.3. Sistema de Congruências Lineares

De acordo com Eves (2011),

O mais importante dos textos de Matemática chineses antigos é o K'ui-ch'ang Suanshu, ou Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, que data o período

Han (206 a.C.,-221d.C.) mas que muito provavelmente contém material bem mais antigo. É uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo. Em seus 9 capítulos, o de relevância para o presente trabalho encontra-se no capítulo 8 que fala sobre Sistema de equações Lineares, (EVES, 2011, p.242).

Um Sistema de Congruências Lineares é quando temos várias equações de congruências, na qual desejamos obter uma solução que satisfaça simultaneamente estas equações.

De acordo com Bezerra (2018, p.149), chamamos de Sistema de Congruências Lineares a todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_1 x \equiv b_1 \mod m_1 \\ a_2 x \equiv b_2 \mod m_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_k x \equiv b_k \mod m_k \end{cases}$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k, m_1, m_2, \dots, m_k$ são inteiros fixados, com $m_i > 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Podemos analisar alguns critérios para verificar se o Sistema de Congruências Lineares admite ou não solução. Para facilitar a compreensão dividiremos em casos, são eles: 1º caso: uma das congruências não admite solução, logo o sistema não admite solução; 2º caso: as congruências admitem solução, mas o sistema não admite solução; 3º caso: as congruências admitem solução e o sistema também admite solução.

2.2.4. Teorema Chinês dos Restos

Uma das técnicas para encontrar a solução de um sistema, é uma ferramenta muito importante descoberta pelos chineses, ou seja, o Teorema Chinês dos Restos. É possível aplicá-lo desde que as congruências lineares atendam suas condições específicas.

Segundo Eves (2011, p.244), após o período Han viveu o matemático Sun-Tzi (ou Sun Tsu Suan Ching), que escreveu um livro “Manual Aritmético do Mestre Sol” escrito provavelmente entre 280 d.C. e 483 d. C. O material assemelha-se muito aos “Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática” dividido em 3 capítulos. Dentre eles, o capítulo 3 aborda problemas aritméticos, perfazendo um total de 36.

No problema 26 (também conhecido como “problema do Mestre Sun”), encontra-se o primeiro problema chinês de análise indeterminada: “Um certo número desconhecido de coisas

quando dividido por 3 deixa resto 2, por 5 resto 3 e por 7 resto 2. Qual é o (menor) número?”
Aí encontramos a semente do famoso Teorema Chinês dos Restos da Teoria dos Números.

De acordo com Bezerra (2018, p.149), definimos o Teorema Chinês dos Restos da seguinte forma: se os inteiros $m_1, m_2, \dots, m_k$ são dois a dois primos entre si, então o Sistema de

$$\text{Congruências Lineares: } \begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x \equiv b_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

admite uma solução, que é única módulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

3. Aspectos Metodológicos

A teoria dos Números é, por natureza, um ramo da Matemática que exige um elevado nível de rigor e talvez por isso a maioria dos materiais que trata sobre o conteúdo de Sistema de Congruências Lineares é tratado de forma bem direta, com poucos exemplos práticos e um número inexpressivo de detalhes. Nesse sentido, buscamos neste capítulo elaborar um material de apoio que apresente soluções detalhadas (com todos os passos da resolução), explicativas (uma linguagem culta, porém acessível) e relacionadas com os conceitos já estudados além daqueles que foram abordados no capítulo anterior.

Este material tem como objetivo auxiliar os professores da Formação Geral Básica que queiram se aprofundar nos conceitos de Teoria dos Números, para alunos da graduação que cursam da disciplina de Introdução a Teoria dos Números, para alunos da pós-graduação na disciplina de Aritmética e pode ainda ser direcionado a aqueles que têm um pouco de familiaridade com a Teoria dos Números.

Em uma busca de uma abordagem mais compreensível, que vise facilitar o acesso e dar uma visão geral do objeto de estudo, e em consonância com um dos objetivos que é utilizar de diferentes técnicas para resolver Sistema de Congruências Lineares que admite solução, dividiremos essas técnicas em tópicos. Dessa forma, queremos que o leitor ao finalizar a leitura deste material se sinta capaz de analisar e escolher a técnica mais eficiente e que melhor se adapte para resolver um Sistema de Congruências Lineares. E essa escolha é possível quando conhecemos todas elas e além disso, suas condições gerais e específicas. Lembrando que há possibilidade de usar mais de uma técnica em um mesmo problema.

Apresentamos agora duas das oito técnicas de resolução de Sistema de Congruências Lineares com uma ou duas variáveis.

Dentre as seis técnicas utilizadas na resolução de Sistema de Congruências Lineares com uma variável a que julgo mais importante é a Técnica IV- Teorema Chinês dos Restos Generalizado com duas equações de congruências.

O objetivo dessa técnica é resolver sistema da forma $\begin{cases} x \equiv c_1 \text{ mod } m_1 \\ x \equiv c_2 \text{ mod } m_2 \end{cases}$ onde $d = (m_1, m_2) \neq 1$.

E para facilitar a resolução desse sistema elaboramos um algoritmo com uma sequência de passos.

Passo $1_{T_{IV}}$: Verificar se o sistema admite solução, ou seja $(m_1, m_2) = d \mid (c_1 - c_2)$.

Passo $2_{T_{IV}}$: Determinar os valores de $a = \frac{m_2}{(m_1, m_2)}$ e $b = \frac{m_1}{(m_1, m_2)}$.

Passo $3_{T_{IV}}$: Aplicar o Algoritmo de Euclides Estendido, para determinar os inteiros x_1 e x_2 tais que $x_1 a + x_2 b = 1$.

Passo $4_{T_{IV}}$: Determinar a solução através da fórmula: $x = c_1 x_1 a + c_2 x_2 b$.

Já das Técnicas de Resolução de Sistema de Congruências Lineares com Duas Variáveis, a que julgo de maior relevância é a Técnica II- Módulos iguais.

Essa técnica é semelhante a resolução de sistema de equações do 1º grau, com duas incógnitas, utilizando o método da adição. Esta busca juntar as duas equações em uma única equação, eliminando uma das incógnitas. Para isso, é necessário que os coeficientes de uma das incógnitas sejam opostos, isto é, devem ter o mesmo valor e sinais contrários.

Se tratando de sistema de congruências com duas variáveis vamos utilizar o método desenvolvido na demonstração do Teorema 1.4 para obter a solução, quando houver. Para aplicar essa técnica devemos observar o módulo de cada equação de congruência, pois é necessário que os módulos sejam iguais.

Para facilitar a resolução de sistemas da forma $\begin{cases} ax + by \equiv r \mod m \\ cx + dy \equiv s \mod m \end{cases}$, apresentamos a seguir uma sequência de passos.

Passo $1_{T_{II}}$: Verificar se o sistema admite solução, ou seja, $(ad - bc, m) = 1$.

Passo $2_{T_{II}}$: Multiplicar a primeira congruência do sistema por d , a segunda congruência por b , e subtrair a segunda equação de congruência da primeira. Obtém-se $(ad - bc)x \equiv dr - bs \mod m$.

Passo $3_{T_{II}}$: Resolva a equação do Passo $2_{T_{II}}$: obtendo o valor de x .

Passo $4_{T_{II}}$: Para determinar o valor de y , devemos multiplicar a primeira congruência pelo valor de c , e a segunda pelo valor de a , e subtrair a segunda equação de congruência da primeira. Obtém-se $(ad - bc)y \equiv as - cr \mod m$.

Passo $5_{T_{II}}$: Resolva a equação do Passo $4_{T_{II}}$: obtendo o valor de y .

Passo $6_{T_{II}}$: Escrever a solução do sistema $s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

4. Considerações Finais

Acreditamos que a nosso objetivo foi alcançado quando elaboramos um material de apoio que possibilite ao professor aprofundar seus conhecimentos sobre Teoria dos Números, mais especificamente sobre aritmética dos Restos, no que diz respeito a Resolução de Sistemas de Congruências Lineares.

Neste material, o leitor terá a oportunidade de conhecer com detalhes cada técnica de resolução, suas especificidades e como aplicar cada uma. Mas antes de escolher uma técnica é preciso fazer uma análise prévia, observar a forma em que o sistema está apresentado, ou seja, na forma completa, onde apresenta todos os coeficientes ou na forma reduzida (equivalente).

Para todas as técnicas o sistema precisa estar na forma reduzida, ou seja, o valor de a deve ser 1. E para transformar um sistema completo em um equivalente utilizamos várias ferramentas que foram enunciadas nos capítulos III e IV. Mas antes de transformá-lo, é necessário verificar se o sistema admite solução, pois se uma das equações de congruência não

admite solução o próprio sistema também não possuirá. E quando não percebemos isso, é muito provável que mesmo não havendo solução realizamos diversos cálculos.

Nesse sentido, afim de evitar que façamos cálculos desnecessários é que elaboramos em cada técnica, uma sequência de passos que busque direcionar o leitor a não esquecer de nenhum detalhe importante que comprometa o desenvolvimento para se chegar a solução, caso exista, do sistema.

Com estes passos é possível também analisar qual a técnica melhor se adapta para cada sistema. Às vezes é possível utilizar apenas uma, mais de uma ou até mesmo fazer a combinação de técnicas para se obter a solução de um sistema. Porém, dependendo da escolha o processo se torna mais trabalhoso e com isso menos ágil.

Neste material também procuramos ressaltar a importância de se conhecer a ou as condições necessárias de cada técnica apresentada, pois a partir disso é possível escolher a mais eficiente e prática.

Finalizamos com a apresentação das técnicas de resolução de Sistema de Congruências Lineares com duas variáveis, ou seja, ao invés de apresentarmos uma solução para o sistema, apresentam pares de soluções, o que torna um diferencial para nosso trabalho.

5. Referências

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. [S.l.]: SBM, 1985.

BEZERRA, M. d. N. C. et al. **Teoria dos números: um curso introdutório**. [S.l.]: Editora Universitária AEDI da UFPA-EditAedi, 2018.

BRASIL, M. d. E. **Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.]: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BURTON, D. **Teoria elementar dos números**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2016.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. trad. 2011.

GROENWALD, C. L. O.; SAUER, L. de O. **Desenvolvendo o pensamento aritmético utilizando os conceitos da Teoria dos Números**. 2005. 93–102 p.

HEFEZ, A. **Aritmética: Coleção PROFMAT**, 1a Edição. 2013.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. 2013. 8 p.



III Encontro Nacional Online de Professores que Ensinam Matemática

Temática: Práticas Pedagógicas de Professores que Ensinam Matemática Pós-Pandemia



REZENDE, M. R. Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura. 2007. 2007. Citado na página 18.

SBM, S. B. D. M. Contribuição da SBM para a discussão sobre currículo de Matemática. 2015. 8 p.