EQUILÍBRIO DE CORPOS NO PLANO INCLINADO: EXPLORANDO CONCEITOS DA MATEMÁTICA E DA FÍSICA – RELATO DE EXPERIÊNCIA

Ensino e Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio

Robson Kleemann[1]

Laércio Rauber[2]

Eduardo da Rosa Duarte[3]

Resumo: Neste trabalho objetiva-se explorar um experimento físico estabelecendo relações matemáticas entre as forças que atuam sobre um objeto no plano inclinado, analisando a relação entre o ângulo de inclinação do plano e o estado de movimento/repouso do corpo. Partindo desta ideia, fez-se a análise de uma atividade experimental, considerando um objeto físico (lata de milho) apoiada em dois tipos de superfícies, de mesmo material, porém com características diferentes. Dos resultados, destaca-se que existem diversas forças que influenciam no movimento de corpos em superfícies inclinadas, incluindo as forças de atrito estático e cinético, as forças peso e normal. Ademais, aponta-se a atividade experimental proposta nesse trabalho como uma possibilidade para explorar de forma interdisciplinar, em sala de aula, conceitos da matemática e/ou da física.

Palavras-chave: Plano inclinado; Equilíbrio de corpos; Ensino e aprendizagem; Matemática e Física; Interdisciplinaridade.

1. Considerações iniciais

É comum deparar-se com situações onde a representação do equilíbrio de um corpo ocorre por meio da imagem de um bloco apoiado sobre uma superfície plana, podendo (ou não) ter inclinação em relação à horizontal. Tal representação é recorrente nos livros didáticos de Física (DAL MORO, FRANÇA, 2015; GUIMARÃES, PIQUEIRA, CARRON, 2013; BONJORNO, BONJORNO, RAMOS, 2011; ARTUSO, WRUBLEWSKI, 2013). No entanto, torna-se necessário maior rigor quando deseja-se obter uma resposta precisa em relação à determinada situação-problema, fato muitas vezes ‘esquecido’ nos livros didáticos, tendo presente no enunciado o termo ‘despreze/desconsidere’ determinadas forças, como o atrito.

Assim, é importante que, ao realizar a análise das condições de equilíbrio de um corpo, considere-se a presença de todas as forças que envolvem o sistema, que podem ser variadas,

[1] Universidade Federal do Rio Grande – FURG. E-mail: robson.kleemann@hotmail.com
[2] Instituto Federal Sul-Rio-Grandense – IFSul. E-mail: laerciorauber33@gmail.com
[3] Secretaria de Estado da Educação de Santa Catarina. E-mail: du_duarte@live.com

dependendo do tipo de superfície que o corpo encontra-se apoiado, e do ângulo de inclinação. Nesse estudo, tem-se como suporte Kleemann (2019), que apresenta um resgate teórico das definições e relações algébricas das principais forças da mecânica, a saber: força peso, força normal e força de atrito.

O cotidiano é constituído por diversos fenômenos que podem ser explicados a partir de conceitos científicos, que buscam uma aproximação de ideias que podem ser generalizadas para casos semelhantes, mesmo que não exista algo concreto/sólido, em estudo, mas que são fundamentais para justificar tais fenômenos, como a força, por exemplo. Note que, força não é algo sólido, que pode ser tocado. O simples fato dos corpos (utilizemos uma maça e a Terra) se manter sobre a superfície terrestre (em seu estado normal) envolve um conceito de força, que denominamos peso, direcionada para o centro da Terra e, definida pela relação (1) entre a massa (m) do corpo (maça) e a aceleração gravitacional (g) do local (Terra). Como reforça Bertoldo (2008), a força externa que atua em um corpo é igual ao produto entre a massa desse corpo pela aceleração que apresenta.

$$P = m.g \qquad (1)$$

Força é uma grandeza, ou seja, pode ser quantificada. "[...] força é um resultado da interação entre dois corpos e pode deformá-los, acelerá-los ou equilibrá-los" (ARTUSO, WRUBLEWSKI. 2013, p. 90). Existe um padrão internacional de medida utilizado para força, o newton (N). As grandezas ainda podem ser classificadas em escalares ou vetoriais, sendo que as grandezas escalares ficam bem definidas apenas com o módulo e sua unidade de medida, enquanto que, as grandezas vetoriais ficam bem definidas quando possuem módulo (acompanhado de sua unidade de medida), direção e sentido. Força é uma grandeza vetorial. As forças podem ser classificadas, quanto à forma de interação entre dois corpos, em forças de campo ou forças de contato. Note que, as forças de contato, como o próprio nome já sugere, necessitam de um contato físico que permita a interação entre os corpos, e, as forças de campo existem sem a necessidade do contato.

Diz-se que um corpo encontra-se em equilíbrio quando o somatório resultante das forças que atuam sobre o sistema é nulo. Em situações cotidianas, se analisadas, apresentam um conjunto de forças que atuam sobre o sistema, podendo estas ser em direções e sentidos equivalentes, ou não. Se analisarmos forças em mesma direção, basta que adicionemo-las (mesmo sentido) ou subtraímo-las (sentidos contrários). Se as direções são perpendiculares

entre si, o Teorema de Pitágoras (2) auxilia para determinar a resultante, se a força for diagonal, podemos fazer a decomposição da força na horizontal (F_x) e na vertical (F_y), o que recai em (2) para a obtenção da resultante.

$$hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto^2 \qquad (2)$$

As rampas, presentes em nosso cotidiano, são importantes para certas atividades. Ela facilitam a realização de certos trabalhos, como exemplo, deslocar um cadeirante, arrastar uma caixa para uma altitude mais elevada, escalar uma superfície, acesso a regiões de níveis inferiores ou elevados. Dessa forma, busca-se aqui explorar grandezas físicas e relacioná-las entre si, envolvendo situações de inclinação de rampas.

Quando se coloca um objeto em repouso sobre uma superfície plana horizontal e, a partir disso, levemente passamos a aumentar a inclinação desta superfície em relação à linha do horizonte, nota-se que, a partir de determinado momento, o objeto passa a deslizar sobre a superfície, assim, buscamos responder o seguinte questionamento: Em que momento o objeto sai do repouso e inicia o movimento? Para se responder a esse questionamento, é necessário considerar alguns fatores que nos direcionam a supor princípios empíricos (hipóteses) buscando explicar a situação de modo que possam, ou não, serem responsáveis por determinado comportamento, sendo estes: 1) Massa do objeto; 2) Ângulo de inclinação da rampa; 3) Tipo de superfície do plano. (COSTA, LEITE, 2010).

2. Materiais e Métodos

Para a realização do experimento prático foi utilizado: lata de milho (peso líquido 280 gramas e peso drenado de 200 gramas), superfície de madeira áspera, superfície de madeira lixada e polida, transferidor. Inicialmente, conforme Figura 1, considere a lata de milho sobre duas superfícies horizontais, e, a partir disso, efetuam-se algumas análises:

Figura 1 – Comportamento da lata de milho sobre as duas superfícies com inclinação nula. Fonte: Autores

Note que, a lata de milho permanece em repouso em relação às superfícies, ou seja, encontra-se em equilíbrio. Pela condição de equilíbrio, temos que o somatório das forças que

atuam sobre o corpo é nulo. Assim, como a lata de milho tem massa 280 gramas, possui uma força (peso) atuando na direção vertical e sentido de cima para baixo. Podemos utilizar (1) e calcularmos a força peso da lata, dada por:

$$P = m.g \;\; => \;\; P = 0{,}280\,.\;10 \;\; => \;\; P \cong 2{,}8\;N \qquad (3)$$

Caso não existisse uma força contrária a esta, o objeto iria afundar na tábua. Assim, como o corpo encontra-se em equilíbrio podemos afirmar que existe uma força de módulo e direção igual ao peso, porém em sentido contrário, no caso, de baixo para cima. Denominemo-la como sendo força normal, que na situação possui valor igual a 2,8 N.

Porém, é fácil percebermos que, sobre uma mesma superfície, podemos soltar um objeto de maior (ou menor) massa, e, o sistema ficar em equilíbrio. Aí, cabe-nos questionarmos: a força normal é sempre constante? A resposta é não. A força normal varia de acordo com a massa do corpo que exerce peso em sentido contrário, de modo que, possui um valor máximo, mas não um valor mínimo. Quando a força peso é maior do que a normal, então o corpo tende a se mover no sentido da força peso, e se for abandonado sobre uma mesa horizontal, a mesma não resiste, e pode se danificar.

A Figura 2 ilustra, a partir de vetores, as forças atuantes sobre um corpo, como citado na situação anterior. Uma observação importante é que, o início de cada vetor dá-se no centro de massa[4], ponto de equilíbrio que distribui uniformemente a massa sobre todas as regiões do corpo.

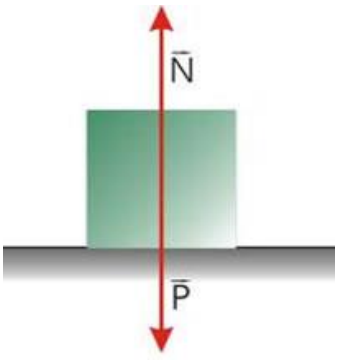

Figura 2 – Vetores força peso e força normal. Fonte: Autores

Mantendo a lata de milho sobre as superfícies, iniciemos variando a altura de um dos lados das tábuas, ou seja, formando uma rampa com uma inclinação em relação ao eixo

[4] Também conhecido como centro de gravidade.

horizontal, aqui denotemos β, de acordo com a Figura 3. Tomemos um transferidor, e fazendo variar a inclinação de β em 10º (em ambas as rampas), percebe-se que os corpos não tiveram mudança em suas posições, ou seja, o sistema permaneceu em equilíbrio, e, com isso, não nos permite tirarmos conclusões sobre a existência de outras forças junto ao sistema. Como a força peso é perpendicular à superfície terrestre, então, havendo uma inclinação das tábuas, podemos afirmar que a força normal e peso não possuem mais sentidos contrários, e, o menor ângulo formado pelos vetores força peso $(\vec{P})$ e força normal $(\vec{N})$ tem medida igual a $180° - \beta$.

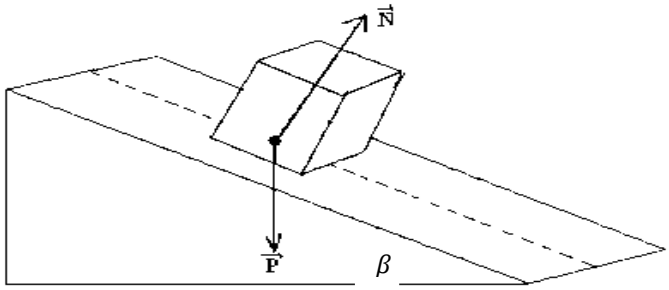

Figura 3 – Comportamento de um objeto de acordo com a inclinação β da rampa. Fonte: Autores

Se inclinarmos ainda mais as duas superfícies, percebe-se que quando β se aproxima de 12º o objeto passa a deslizar sobre a tábua polida, ou seja, sai da condição de repouso, enquanto que, sobre a tábua áspera ele ainda permanece na eminência de movimento. Note que, se para um ângulo de aproximadamente 12º o corpo saiu do repouso sobre a tábua polida, então existia alguma força que atuava sobre o mesmo, em sentido contrário a tendência de seu movimento. Na tábua áspera, a lata de milho permaneceu em repouso até atingir um ângulo médio de 23,5º. Assim, indagamo-nos: será que na tábua áspera também existe uma força contrária à tendência de movimento do corpo? A fim de verificar a condição, tomemos um ângulo de inclinação maior do que 23,5º. Note que, para um ângulo de 25º o corpo sai do estado de repouso sobre a tábua áspera, e, com isso, a indagação prévia é afirmativa. As Figuras 4 e 5 apresentam os resultados experimentais descritos acima.

Figura 4 - Superfície lisa com inclinação de 12º e 15º. Fonte: Autores

Figura 5 - Superfície áspera com inclinação de 23,5º e 25º. Fonte: Autores

Assim, se denotarmos força de atrito (F_{at}) como a força contrária ao sentido do movimento do corpo, pode-se afirmar que, para a superfície áspera, seu valor é maior do que para a superfície polida. Como o corpo entrou em movimento em sentido contrário a força de atrito, então existe uma força denotada peso decomposto em x (P_x), cujo módulo, a partir de determinada inclinação, torna-se maior do que o módulo da força de atrito. Pode-se afirmar isso pois, se o corpo sai do estado de repouso, é porque a força resultando sobre o sistema deixou de ser nula. Isso permite afirmar que o valor da força de atrito quando o corpo está em repouso atinge um valor máximo, e depende do ângulo de inclinação e do tipo do material sobre o qual o corpo está sobreposto. Denota-se a força de atrito enquanto o corpo ainda permanece em repouso como força de atrito estático máxima $\left(F_{ae_{máx}}\right)$.

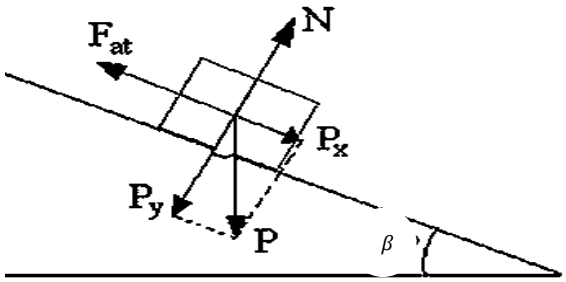

Figura 6 – Decomposição de forças no plano inclinado. Fonte: Autores

Supondo que, na Figura 6, a inclinação β faz com que o corpo tende a sair do estado de repouso. Assim, como o sistema ainda estará em equilíbrio, e sendo P_y o valor da força peso decomposta no eixo y, tem-se as seguintes relações:

$$\text{(i) } F_{ae_{máx}} = P_x \qquad \text{(ii) } N = P_y \qquad \text{(iii) } P^2 = {P_x}^2 + {P_y}^2 \qquad (4)$$

Como a força de atrito estático depende diretamente do tipo de material sobre o qual o corpo se encontra e da força normal, a partir de relações trigonométricas, pode-se afirmar:

$$F_{at} = \mu_e . N \quad / \quad P_x = P . \sin\beta \quad / \quad P_y = P . \cos\beta \qquad (5)$$

Onde μ_e representa o coeficiente de atrito estático do material do plano (não possui unidade de medida, representa apenas uma proporção).

A partir do momento que o corpo entra em movimento, a força de atrito em sentido contrário à tendência de movimento do corpo não deixa de existir. Denotemo-la de força de atrito cinético, a qual possui um valor mínimo, e pode ser expressa por $F_{ac_{mín}} = \mu_c . N$, sendo μ_c o coeficiente de atrito cinético da superfície em que o corpo encontra-se sobreposto. Como a força normal e o peso decomposto em y se anulam, então, se existir movimento do corpo é porque a força peso decomposta em x é maior do que a força de atrito. Note que a força peso (1) não depende da inclinação do plano. Assim, das relações (5) temos que $P_x = P . \operatorname{sen} \beta$, logo, como P é constante, então P_x é diretamente proporcional a $\operatorname{sen} \beta$. Note que, se $0 < \beta \leq 90°$, então $\operatorname{sen} \beta$ é crescente, o que implica P_x crescente, o que pode ser verificado para alguns valores de inclinação na tabela 2. Assim, tem-se justificado matematicamente o motivo pelo qual um corpo tende a sair de seu estado de repouso (deslizar) quando a superfície na qual ele se encontra passa a ter uma inclinação maior em relação ao eixo horizontal.

3. Resultados

Dos estudos realizados, é possível afirmar que o uso de rampas no cotidiano facilita o desenvolvimento de certas atividades, como sobrelevar determinado objeto. Uma rampa lisa permite que um objeto deslize facilmente sobre a mesma, se comparado a uma rampa áspera, pois a força de atrito é menor. Ainda, é possível afirmar que o ângulo de inclinação da rampa está diretamente ligado à tendência de deslizamento do corpo, de modo que o objeto começa a deslizar quando a decomposição horizontal da força peso torna-se maior do que a força de atrito.

No Quadro 1, pautado na atividade experimental realizada, apresenta-se o comportamento da lata de milho nas rampas lisa e áspera, simulando diferentes inclinações. Indica-se também o estado inercial do corpo e o tipo de atrito presente em cada situação.

Quadro 1: Comportamento da lata de milho de acordo com a inclinação da rampa e tipo de atrito existente

Inclinação	**Rampa lisa**		**Rampa áspera**	
0º	Repouso	Atrito estático	Repouso	Atrito estático
10º	Repouso	Atrito estático	Repouso	Atrito estático
12º	Mudança de estado inercial	Atrito estático/cinético	Repouso	Atrito estático
15º	Movimento	Atrito cinético	Repouso	Atrito estático
23,5º	Movimento	Atrito cinético	Mudança de estado inercial	Atrito estático/cinético
25º	Movimento	Atrito cinético	Movimento	Atrito cinético

Analogamente, o Quadro 2 mostra os valores aproximados da força peso decomposta

nos eixos x e y, de acordo com o ângulo de inclinação da rampa. Para o cálculo, considera-se o peso da lata de milho caracterizada na atividade experimental.

Quadro 2: Valores aproximados da decomposição do peso da lata de milho de acordo com a inclinação da rampa.

Inclinação (β)	$P_x = P.\text{sen}\,\beta$	$P_y = P.\cos\beta$
5º	0,244 N	2,789 N
10º	0,486 N	2,757 N
15º	0,725 N	2,705 N
20º	0,958 N	2,631 N
25º	1,183 N	2,538 N

4. Considerações finais

A partir da atividade experimental realizada foi possível identificar as forças presentes sobre um corpo enquanto o mesmo encontra-se em repouso, ou na tendência de iniciar um movimento, sobre superfícies planas. Além disso, foi possível estabelecer relações matemáticas, facilitando a compreensão de alguns fenômenos cotidianos.

A partir da atividade experimental descrita, identificou-se que superfícies lisas permitem que os corpos deslizem mais facilmente, se comparado à superfícies ásperas. Ainda, a existência das forças de atrito cinético e estático está condicionada a inclinação do plano e ao tipo de superfície, e que elas não coexistem, prevalecendo apenas uma delas. É importante destacar que, nas descrições expostas neste trabalho, levou-se em conta a existência de algumas forças (citadas no mesmo), sem nos determos na investigação de outras possíveis forças junto à situação-problema, ou seja, propôs-se um modelo que analisa o comportamento de apenas algumas grandezas que possuem relação mútua entre si.

Por fim, indica-se que atividades experimentais como a citada nesse trabalho podem contribuir significativamente ao processo de ensino e aprendizagem na sala de aula, já que possibilita a investigação coletiva da situação, identificando hipóteses que justificam determinado fenômeno. Assim, deixa-se como uma ação sugestiva para ser realizada nas aulas de matemática e/ou de física, indicando a possibilitando de desenvolvê-la de forma interdisciplinar, investigando e relacionando conceitos das diferentes áreas.

5. Referências

ARTUSO, A. R. WRUBLEWSKI. M. **Física.** Curitiba: Positivo, 2013.

BERTOLDO. L. **Artigos sobre o dinamismo.** Artigo 31. Versão digitial. Editora Bibliomundi, 2008. Disponível em: <https://bibliomundi.com/>. Acesso em: 20 dez. 2021.

BONJORNO, R. A.; BONJORNO, V.; RAMOS, C. M. **Física.** São Paulo: FTD, 2011.

COSTA, E. V.; LEITE, C. A. F. Deslocamento da força normal à superfície de apoio a um corpo em equilíbrio na presença da força de atrito. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.32, n.4., 2010. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/i/2010.v32n4/> Acesso em: 10 abr. 2022.

DAL MORO, G. A. FRANÇA, H. S. **Física:** Ensino Médio. Curitiba: Positivo, 2015.

GUIMARÃES, O. PIQUEIRA, J. R. CARRON, W. **Física:** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

KLEEMANN, R. A Matemática aplicada à Física na construção de rampas de acesso. In: WICHNOSKI, P. (Org.). **Estudos exploratórios em matemática aplicada.** Ampére – PR: FAMPER, 2019. p. 51-63.